УДК 621.37: 621.391.519.21

ОЦІНКА ЧАСТОТИ ДИСКРЕТНО-ЕКСПОНЕНЦІАЛЬНОГО СИГНАЛУ

Д. С. Дем'яник

Національний авіаційний університет

int2080@ukr.net

Порівняно ефективності ортогональних перетворень в базисах дискретно-експоненціальних функцій і функцій Віленкіна–Крестенсона під час оцінювання частоти дискретно-експоненціального сигналу.

Ключові слова: ортогональні перетворення, функції Віленкіна–Крестенсона, оцінка параметрів сигналу.

Efficiencies of orthogonal transformations in bases of discrete-exponential functions and functions of Vilenkin–Chrestenson were compared.

Keyworlds: orthogonal transforms, Vilenkin–Krestenson's functions, signal's parameters evaluation.

Вступ

Типовою задачею в радіолокації під час прийому на фоні завад є відокремлення корисного сигналу й оцінка його параметрів.

У системах цифрової обробки даних задля цього іноді використовують дискретні або швидкі перетворення Фур'є послідовності, що була обрана. До висновку щодо належності в послідовності корисного сигналу приходять за допомогою аналізу отриманого спектра.

Якщо сигнал було виявлено, виконують оцінювання його параметрів.

У цій статті мова йтиметься про оцінку частоти дискретно-експоненціального сигналу, що обирається на фоні адитивного білого гауссівського шуму.

Наступні базиси ортогональних функцій будуть розглядатися: базис дискретно-експоненціальних функцій (ДЕФ) і базис функцій Віленкіна–Крестенсона (ВКФ).

Постановка задачі

Мета даного дослідження — порівняння ефективності двох базисів, що були згадані раніше, оцінювання частоти дискретно-експоненціального сигналу, що обирається на фоні адитивного білого шуму. Модель сигналу описується таким виразом:

$$\dot{s}_g(i) = U\exp(j\frac{2\pi gi}{N}),\quad i=\overline{0\ldots N-1},\ g\in[0,N),$$

де i — дискретний час; g — нормована частота сигналу; U — амплітуда; N — обсяг вибірки; j — уявна одиниця.

Як критерій ефективності виступає залежність імовірності правильної приблизної оцінки частоти від відношення сигнал/шум за потужністю.

Під «приблизною оцінкою» мається на увазі пошук такої нормованої частоти g', щоб $\lim|g-g'|\to\min$ (виявлення з перевіркою N гіпотез [1]). Шум $\dot{\omega}(i)$ математично описується таким чином

$$\dot{\omega}(i) = a(i) + jb(i),\quad i=\overline{0\ldots N-1},$$

де $a(i)$ та $b(i)$ — незалежні випадкові величини (ВВ), підпорядковані нормальному закону розподілення з дисперсією $\psi = 1$ і нульовим математичним сподіванням (МС).

Послідовність, що обирається, може бути або сумішшю корисного сигналу $\dot{s}_g(i)$ з невідомою дійсною частотою g і шуму $\dot{\omega}(i)$:

$$\dot{x}(i) = \dot{s}_g(i) + \dot{\omega}(i),$$

або лише шумом $\dot{\omega}(i)$:

$$\dot{x}(i) = \dot{\omega}(i).$$

Спектральний аналіз білого шуму

Спектр сигналу в загальному вигляді визначається виразом:

$$\dot{X}(k) = \sum_{i=0}^{N-1} \dot{x}(i) f_k(i);\qquad (1)$$
$$\dot{X}(k) = A(k) + jB(k),$$

де $\dot{X}(k)$ — k-й спектральний коефіцієнт; $\dot{x}(i)$ — i-й відлік обраної послідовності; $f_k(i)$ — i-й відлік k-ї базисної функції; $A(k)$ та $B(k)$ — квадратурні компоненти k-го спектрального коефіцієнта.

Розглянемо випадок, коли послідовність являє собою шум $\dot{\omega}(i)$.

Із виразу (1) випливає, що кожен з коефіцієнтів $\dot{X}(k)$ знаходиться за допомогою підсумовування відліків вхідної послідовності $\dot{x}(i)$ з постійними ваговими коефіцієнтами. Тому (враховуючи те, що квадратурні компоненти відліків послідовності $\dot{x}(i)$ у даному випадку є ВВ з МС, що дорівнює нулю) квадратурні компоненти відліків спектрів $A(k)$ та $B(k)$ є нормально розподіленими ВВ з нульовим МС.

Оскільки білий шум має рівномірну спектральну щільність, дисперсії величин $A(k)$ та $B(k)$ для всіх k дорівнюють одна одній і мають значення

$$\psi_k = N\psi,\ k = \overline{0 \ldots N-1}.$$

Виходячи з цього, розподіл амплітуд спектральних коефіцієнтів $|\dot{X}(k)|$ відповідає закону Релея [2]:

$$p_k(\tau) = \frac{\tau}{\psi_k}\exp\left(-\frac{\tau^2}{2\psi_k}\right),\ k = \overline{0 \ldots N-1}.$$

Враховуючи, що $\psi = 1$, наведемо вираз, що описує щільності ймовірностей значень амплітуд всіх спектральних коефіцієнтів при використанні будь-якого ортогонального базису:

$$p(\tau) = \frac{\tau}{N}\exp\left(-\frac{\tau^2}{2N}\right).$$

Імовірність того, що під час аналізу послідовності, що являє собою лише шум, амплітуда якогось зі спектральних коефіцієнтів буде вищою за деяке число α, визначається виразом

$$P(|\dot{X}(k)| > \alpha) = Q(\alpha) = \exp\left(-\frac{\alpha^2}{2N}\right).$$

Взявши натуральний логарифм від цього виразу, отримаємо формулу:

$$V = \sqrt{-2N\ln(P_f)},$$

де V — поріг розв'язку; P_f — максимально допустима ймовірність перевищення порогу розв'язку амплітудою одного зі спектральних коефіцієнтів під час прийому послідовності, що не містить у собі корисного сигналу.

Базис дискретно-експоненціальних функцій

Спектральні коефіцієнти обраної послідовності в базисі ДЕФ знаходяться таким чином:

$$\dot{X}(k) = \sum_{i=0}^{N-1}\dot{x}(i)\exp\left(-j\frac{2\pi ki}{N}\right),\ k,i = \overline{0 \ldots N-1}.$$

Цей базис описується виразом

$$f_k(i) = \exp\left(-j\frac{2\pi ki}{N}\right),\ k,i = \overline{0 \ldots N-1},$$

де $f_k(i)$ — i-й відлік k-ї базисної функції.

При спектральному аналізі в базисі ДЕФ послідовності, що складається з адитивної суміші сигналу й шуму, квадратурні компоненти спектральних коефіцієнтів можна подати так:

$$A(k) = A'(k) + \varepsilon_1(k),\ B(k) = B'(k) + \varepsilon_2(k),$$
$$k = 0 \ldots N-1,$$

де $\varepsilon_1(k)$ та $\varepsilon_2(k)$ — незалежні нормально розподілені випадкові величини з МО, що дорівнює нулю, й дисперсією, що дорівнює N; $A'(k)$ та $B'(k)$ — квадратурні компоненти k-го коефіцієнта розкладу в ряд за базисними функціями ДЕФ чистого сигналу $\dot{s}_g(i)$.

Величина $|\dot{X}(k)| = \sqrt{A^2(k) + B^2(k)}$ за будь-яких значень k є амплітудою двовимірного вектора. Компоненти цього вектора не залежать один від одного й підпорядковуються нормальному закону розподілення. Їхні дисперсії дорівнюють між собою, а МС — ні.

З цього випливає, що розподілення величин $|\dot{X}(k)|$ описується законом Релея–Райса [2]:

$$p_k(\tau) = \frac{\tau}{N}\exp\left(-\frac{\tau^2 + u_k^2}{2N}\right)I_0\left(\frac{\tau u_k}{N}\right), \qquad (2)$$

де $u_k = \sqrt{A'^2(k) + B'^2(k)}$ (амплітуда k-го спектрального коефіцієнта у спектрі сигналу $\dot{s}_g(i)$); I_0 — модифікована функція Бесселя нульового порядку.

Отже, чим більше значення має параметр u_k, тим більше МС має амплітуда k-го спектрального коефіцієнта.

Під час аналізу в базисі ДЕФ чистого сигналу $\dot{s}_g(i)$ з цілою нормованою частотою g відмінну від нуля амплітуду має лише спектральний коефіцієнт з номером $k = g$ (оскільки в цьому випадку $\dot{s}_g(i)$ та $f_k(i)$ комплексно сполучені).

При аналізі в цьому базисі сигналу $\dot{s}_g(i)$ із дрібною дійсною частотою g максимальну амплітуду буде мати той спектральний коефіцієнт, номер якого найближчий до значення g.

Виходячи з цього, алгоритм приблизної оцінки частоти сигналу виглядає таким чином:

1) обрана послідовність проходить через процесор ДПФ у базисі ДЕФ;
2) знаходиться вихідний канал процесора ДПФ з максимальним за амплітудою відгуком;
3) амплітуда відгуку на знайденому каналі порівнюється з пороговим значенням;
4) якщо амплітуда перевищує поріг, частота сигналу, що був прийнятий, обирається такою, що дорівнює номеру каналу; в іншому випадку приймається рішення про відсутність сигналу в обраної послідовності.

Базис функцій Віленкіна–Крестенсона

Базис ВКФ, що упорядковані за Адамаром, може бути описаний таким виразом [3]:

$$had_k(i) = \prod_{z=0}^{n-1} W^{k_z i_z},$$

де k — номер базисної функції системи ВКФ–Адамара; $W = \exp\left(-j\frac{2\pi}{m}\right)$ — фазовий множник, у якому m — основа системи числення (перший параметр системи ВКФ); n — показник кронекерівського ступеня (другий параметр системи ВКФ); k_z і i_z — розрядні коефіцієнти в m-му поданні чисел k та i.

Дискретний спектр послідовності відліків у цьому базисі знаходиться за допомогою співвідношення

$$\dot{X}(k) = \sum_{i=0}^{N-1} \dot{x}(i) \prod_{z=0}^{n-1} W^{k_z l_z} .$$

При спектральному аналізі в базисі ВКФ послідовності, що складається з суміші сигналу й шуму, лишається правильним вираз (2), що був отриманий для базису ДЕФ.

Відмінність полягає лише в тому, що для однієї нормованої частоти g коефіцієнти u_k будуть відрізнятися для базисів ДЕФ та ВКФ.

У випадку з базисом ВКФ мінімум різниці між g та k не забезпечує максимального значення u_k, як це було для випадку з ДЕФ.

Відповідно, алгоритм приблизної оцінки частоти сигналу, що був пропонований для базису ДЕФ, не підходить для базису ВКФ.

Крім того, при аналізі чистих сигналів з деякими цілими частотами в базисі ВКФ з параметром $m = 4$, максимальні за амплітудою відгуки наявні водночас на двох каналах процесора ДПФ.

Це, у свою чергу, призводить до існування таких вихідних каналів, максимальні відгуки на яких спостерігаються при різних частотах вхідного сигналу.

Наприклад, під час аналізу сигналу з нормованою частотою $g = 2$ в базисі ВКФ–Адамара ($m = 4,\ n = 2$) максимальні за амплітудою відгуки спостерігаються на 9-му й 8-му частотних каналах.

Якщо $g = 6$, то максимуми наявні на 9-му й 10-му каналах.

Таким чином, при аналізі суміші сигналу й шуму, якщо максимум спостерігається на 9-му каналі, необхідно порівняти між собою відгуки на 10-му й 8-му каналах, щоб вирішити, яку частоту має отриманий сигнал.

Тому алгоритм приблизного оцінювання частоти дискретно-експоненціального сигналу за допомогою базису ВКФ дещо складніший, ніж алгоритм для базису ДЕФ.

Реалізація цього алгоритму потребує попередньої підготовки, що полягає у складанні масивів відповідності максимумів на вихідних каналах частотам вхідних сигналів.

Блок-схему цього алгоритму показано на рис. 1.

Експеримент

Для порівняння ефективності двох базисів для оцінки частоти дискретно-експоненціального сигналу було проведено статистичний експеримент, результати якого подано на рис. 2, 3.

Параметри експерименту

Для експерименту використовувалися такі базиси:

- базис ДЕФ (16 точок);
- базис ДЕФ (64 точки);
- базис ВКФ ($m = 4,\ n = 2$, 16 точок);
- базис ВКФ ($m = 4,\ n = 3$, 64 точки).

Поріг рішення V був обраний таким чином, щоб імовірність перевищення амплітудою відгуку на будь-якому з вихідних каналів процесора ДПФ при аналізі послідовності, що є шумом $\dot{\omega}(i)$, становила не більше, ніж 0,001.

Для кожної точки на графіках обсяг експерименту дорівнював 1000 000.

Імовірність D знаходилась як відношення кількості правильних оцінок до обсягу експерименту. Кожна оцінка частоти сигналу проводилася таким чином:

1) генерується білий гауссівський шум (комплексний вектор незалежних випадкових величин з МС, що дорівнює нулю, й $\psi = 1$, розмірністю N — кількість точок ДПФ);

2) генерується випадкове дійсне число g з діапазону $[0, N-1)$ (розподілення значень g — рівномірне);

3) генерується дискретно-експоненціальний сигнал з частотою g (комплексний вектор розмірністю N) й складається з вектором гауссівського шуму;

4) проводиться ДПФ вектора-суміші й оцінювання частоти g' за алгоритмами, що були описані вище;

5) якщо $|g' - g| < 1$, оцінка вважається правильною, лічильник правильних оцінок збільшується на 1 (таким чином, якщо частота сигналу дорівнює $g = 8{,}3$, то правильними будуть вважатися як оцінка $g' = 8$, так і $g' = 9$).

Результати

На графіках (рис. 2, 3) вздовж осі *OX* відкладені значення b — відношення сигнал/шум за потужністю $\left(b = \dfrac{U^2}{2\psi} \right)$, уздовж осі *OY* — значення D — імовірності правильної оцінки частоти сигналу.

ISSN 2075-0781. Наукоємні технології, 2011. № 3–4 (11–12)

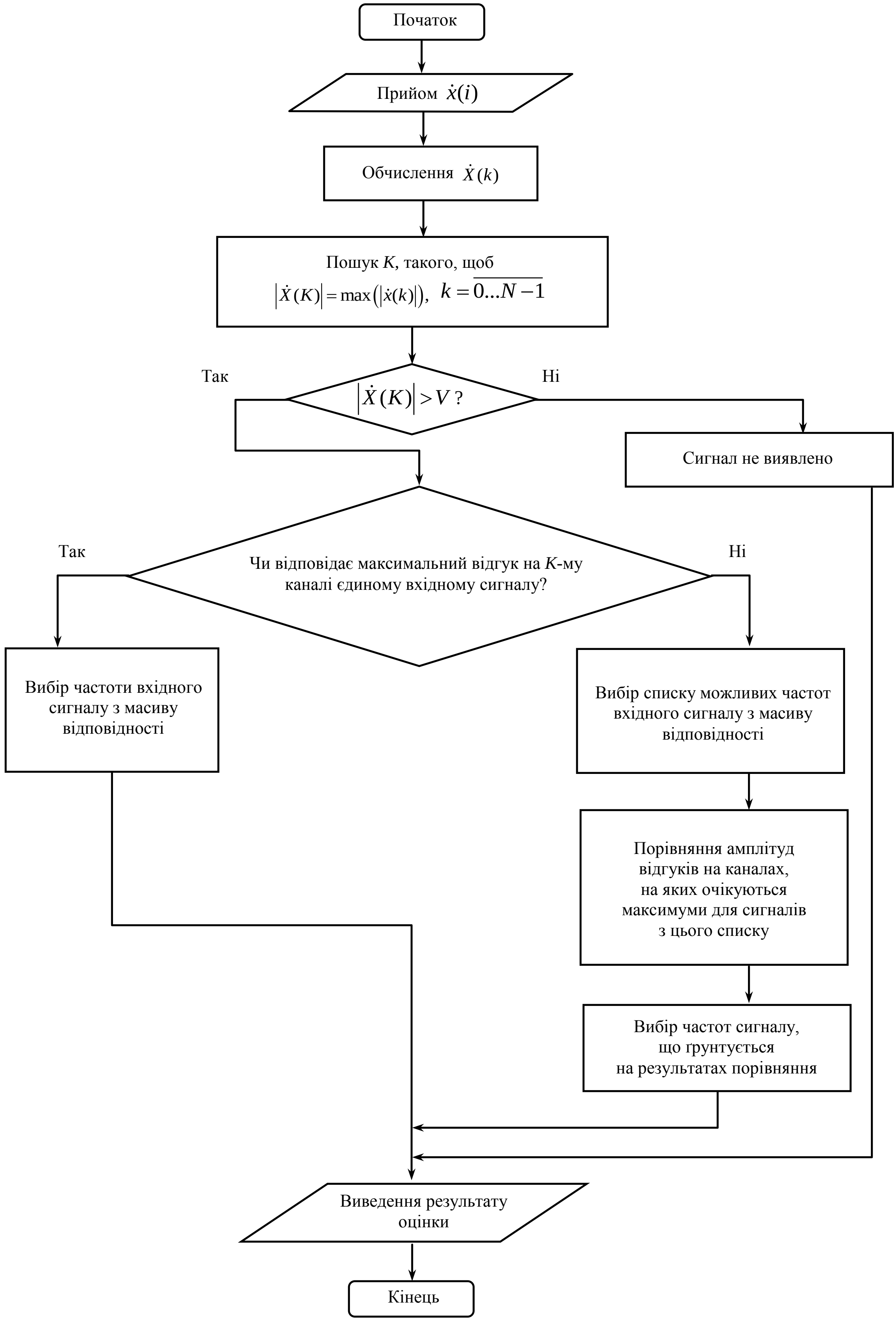

Рис. 1. Алгоритм приблизної оцінки частоти сигналу за допомогою базису ВКФ

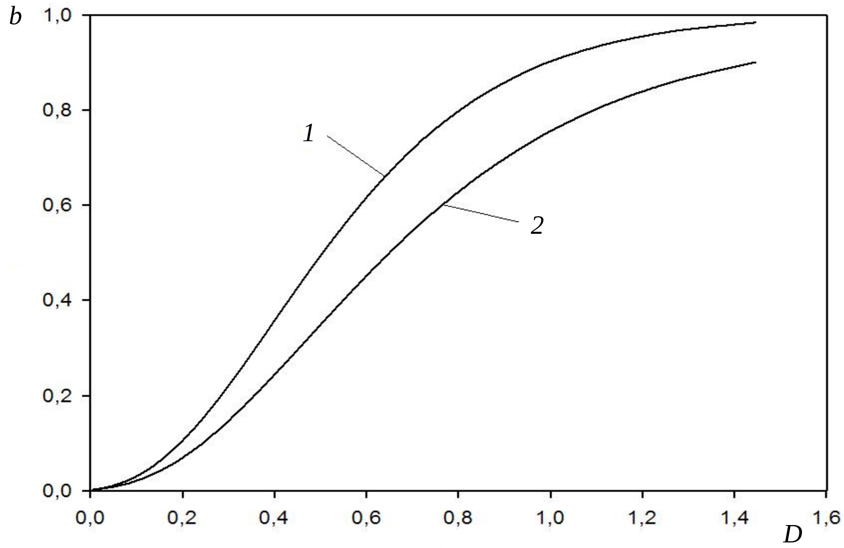

Рис. 2. Залежність імовірності правильної оцінки частоти сигналу від відношення сигнал/шум, $N = 16$ (лінія *1* — ДЕФ, лінія *2* — ВКФ)

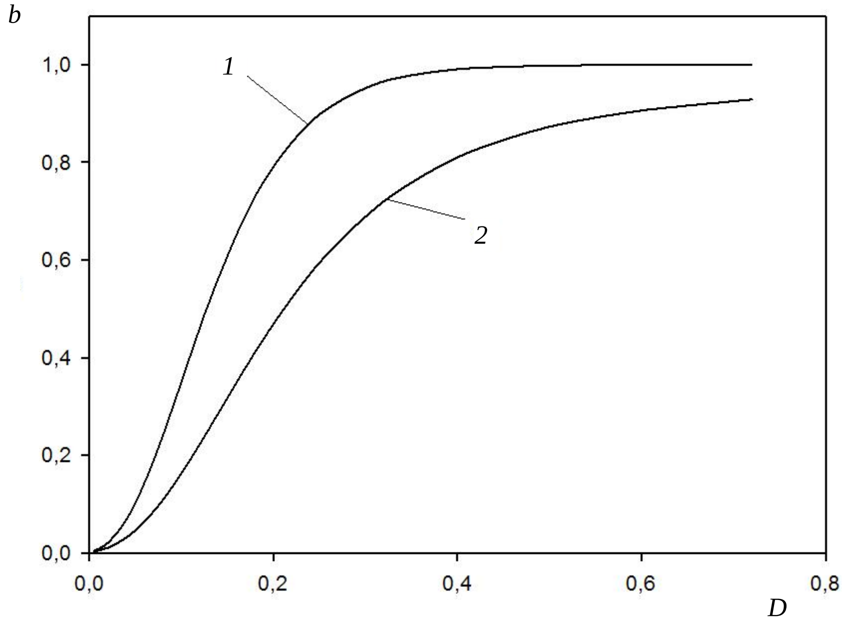

Рис. 3. Залежність імовірності правильної оцінки частоти сигналу від відношення сигнал/шум, $N = 64$ (лінія *1* — ДЕФ, лінія *2* — ВКФ)

Бачимо, що ймовірність D правильної оцінки для базису ДЕФ дещо перевищує цей параметр для систем ВКФ.

Проте варто зауважити, що перетворення в системі ВКФ потребують меншого обсягу обчислювань, ніж перетворення в системі ДЕФ [3].

Таким чином, процесор ДПФ ВКФ може мати більшу швидкодію, ніж процесор ДПФ ДЕФ (або потребувати менше апаратурних виатрат).

ЛІТЕРАТУРА

1. *Ван Трис Г.* Теория обнаружений, оценок и модуляций / Трис Г. Ван. — Нью-Йорк, 1968; пер. с англ.; под ред. проф. В. И. Тихонова. — Т. 1. — М. : Сов. радио, 1972. — 744 с.

2. *Левин Б. Р.* Теоретические основы статистической радиотехники / Б. Р. Левин. — 3-е изд., перебот. и дополн. — М. : Радио и связь, 1989. — 656 с.

3. *Трахтман А. М.* Основы теории дискретных сигналов на конечных интервалах / А. М. Трахтман, В. А. Трахтман. — М. : Сов. радио, 1975. — 208 с.

Стаття надійшла до редакції 12.09.2011.