УДК 519.21:681.5.01 (045)

МЕТОД ІНВАРІАНТІВ ТА ЙОГО ЗАСТОСУВАННЯ В ЗАДАЧАХ КЕРУВАННЯ СИСТЕМАМИ В УМОВАХ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ. УЗАГАЛЬНЕННЯ ФОРМУЛИ ІТО–ВЕНТЦЕЛЯ. СТОХАСТИЧНИЙ ПЕРШИЙ ІНТЕГРАЛ

В. О. Дубко, д-р фіз.-мат. наук, проф.

Національний авіаційний університет

applied_math@ukr.net

Отримано формулу диференціювання стохастичної функції від розв'язків узагальнених рівнянь Іто (узагальнення формули Іто–Вентцеля). Побудовано стохастичне рівняння для знаходження перших стохастичних інтегралів узагальнених рівнянь Іто.

Ключові слова: інтегральний інваріант, стохастичні системи, багатовид, перший інтеграл.

The formula of differentiation of the stochastic function on the solutions of generalized equations Ito (generalization of the formula of Ito-Venttselja) is constructed. The stochastic equation for the first stochastic integrals for generalized equations Ito is constructed.

Keywords: integral invariants, stochastic systems, manifold, first integral.

Вступ

Уявлення про випадкові динамічні багатовиди та визначення інтегралів пов'язаних з ними, було розкрито в працях [2–9].

Зосередимо увагу на побудові правил диференціювання випадкової функції від випадкових процесів. Це правило узагальнює формулу Іто–Вентцеля в разі, якщо функція та процес є розв'язками узагальнених рівнянь Іто. Ці рівняння, поряд з вінерівськими процесами, включають пуассонівські збурення.

Отже, побудуємо рівняння для знаходження стохастичних та перших інтегралів узагальнених рівнянь Іто.

Узагальнена формула Іто–Вентцеля

У праці [7] рівняння для ядер $\rho(t;x)$ інтегрального інваріанта були отримані з використанням множини детермінованих функцій $f(t;x)$:

$$\int\limits_{R^n}\rho(t;x)f(t;x)d\Gamma(x)=\int\limits_{R^n}\rho(0;y)f(t;x(t;y))d\Gamma(y),$$

де $x,\acute{o}\in\mathbb{R}^n$.

Покажемо як можна використати рівняння

$$\int\limits_{R^n}\rho(t;x)z(t;x)d\Gamma(x)=\int\limits_{R^n}\rho(0;y)z(t;x(t;y))d\Gamma(y);$$

$$\int\limits_{R^n}\rho(0;x)d\Gamma(x)=1,\ \rho(0;x)\geq 0,\ \lim_{|x|\to\infty}\rho(0;x)=0, \quad (1)$$

де $z(t;x)$ — випадковий процес-функція для знаходження диференціалу від випадкової функції $z(t;x(t))$.

Побудову відповідного рівняння реалізовуватимемо за умов *L*), які є достатніми, а саме:

*L*1) $x(t)=x(t,y),\ x(0)=y\in\mathbb{R}^n$ — розв'язки системи стохастичних диференціальних рівнянь (СДР):

$$dx_i(t)=a_i(t;x(t))dt+b_{i,k}(t;x(t))dw_k(t)+$$
$$+\int\limits_{R(\gamma)}g_i(t;x(t);\gamma)\nu(dt;d\gamma),$$

де коефіцієнти $a(t;x)$, $b(t;x)$, $g(t;x;\gamma)$ — обмежені та неперервні разом зі своїми похідними

$$\frac{\partial a_i(t;x)}{\partial x_j},\ \frac{\partial^2 a_i(t;x)}{\partial x_j\partial x_l},\ \frac{\partial b_{i,k}(t;x)}{\partial x_j},$$
$$\frac{\partial g_i(t;x;\gamma)}{\partial x_j},\quad i,j=\overline{1,n}$$

за сукупністю змінних $(t;x;\gamma)$; за індексами, які трапляються двічі, ведеться підсумовування.

У рівнянні (2) і подальших, $w_k(t)$, $k=\overline{1,m}$ — незалежні вінерівські процеси, а $\nu(t;\Delta\gamma)$ — нецентрована випадкова міра Пуассона.

*L*2) $\rho(t)=\rho(t;x)$ — розв'язок рівняння для ядра інтегрального інваріанта:

$$d_t\rho(t)=a(t)dt+b_k(t)dw_k(t)+$$
$$+\int\limits_{R(\gamma)}Q(t;\gamma)\nu(dt;d\gamma), \quad (3)$$

де $b_k(t)=-\dfrac{\partial\rho(t;x)b_{ik}(t;x)}{\partial x_i}$;

$$a(t)=\left(\frac{\partial\left(\rho(t;x)a_i(t;x)\right)}{\partial x_i}-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{2}\frac{\partial^2\left(\rho(t;x)b_{ik}(t;x)b_{jk}(t;x)\right)}{\partial x_i\partial x_j}\right);$$

$$\int\limits_{R(\gamma)}Q(t;\gamma)\nu(dt;d\gamma)=-\int\limits_{R(\gamma)}\{\rho(t;x)-$$
$$-\rho\left(t;x-g(t;x^{-1}(t;x;\gamma);\gamma)\right)\times$$
$$\times D\left(x^{-1}(t;x;\gamma)\right)\}\nu(dt;d\gamma), \quad (4)$$

де $D\left(x^{-1}(t;x;\gamma)\right)$ — якобіан переходу від змінних y до x: $y+g(t;y;\gamma)=x$; $z(t;x)$ — підпорядкована системі СДР

$$d_t z(t)=F(t)dt+D_k(t)dw_k(t)+ + \int_{R(\gamma)} G(t;\gamma)\nu(dt;d\gamma), \quad (5)$$

де

$$F(t)=F(t;x), D_k(t)=D_k(t;x), \\ G(t,\gamma)=G(t;x;\gamma) \quad (6)$$

скалярні, у загальному випадку, випадкові функції, відносно яких припускаємо, що вони неперервні й обмежені разом зі своїми похідними по x, до другої включно, першій похідній по t та вимірні щодо потоку σ-алгебр F_t, узгодженого з процесами $w_k(t)$ $\left(k=\overline{1,m}\right)$ та $\nu(t;\Delta\gamma)$.

Як слідує з умови (1),

$$\int_{R^n}\rho(0;y)d_t z(t;x(t;y))d\Gamma(y)= = \int_{R^n} d_t\rho(t;x)z(t;x)d\Gamma(y). \quad (7)$$

За узагальненою формулою Іто отримуємо:

$$\int_{R^n} d_t\rho(t;x)z(t;x)d\Gamma(x)= \int_{R^n} d\Gamma(x)\Big\{\Big[F(t,x)\rho(x,t))+ + z(t,x)\left(\frac{\partial\left(\rho(t;x)a_i(t;x)\right)}{\partial x_i}- -\frac{1}{2}\frac{\partial^2\left(\rho(t;x)b_{ik}(t;x)b_{jk}(t;x)\right)}{\partial x_i\partial x_j}\right)- -D_k(t,x)\frac{\partial\rho(t;x)b_{ik}(t;x)}{\partial x_i}\Big]dt+ +\Big[D_k(t,x)\rho(x,t))- -\frac{\partial\rho(t;x)b_{ik}(t;x)}{\partial x_i}z(x,t)\Big]dw_k+I_1+I_2, \quad (8)$$

де

$$I_1=\int_{R^n} d\Gamma(x)\int_{R(\gamma)}\Big[(z(t,x)+G(t;x,\gamma))\times \times\left(\rho\left(t;x-g(t;x^{-1}(t;x;\gamma);\gamma)\right)D\left(x^{-1}(t;x;\gamma)\right)\right)- $$

$$I_2=-\int_{R^n} d\Gamma(x)z(t,x)\rho(x,t)\Big]\nu(dt;d\gamma).$$

За означенням, $x^{-1}(t;ó;\gamma)$ — розв'язок рівнянь $y+g(t;y;\gamma)=x$.

Тому, повертаючись в I_1 до початкових змінних і враховуючи, що інтегрування ведеться по усьому простору, після виконання в остаточному виразі зміну позначень $y\to x$, дістаємо:

$$I_1=\int_{R^n} d\Gamma(x)\int_{R(\gamma)}\rho(x,t)\Big[(z(t,\left(x+g(t;x;\gamma)\right)+ +G\left(t;\left(x+g(t;x;\gamma)\right),\gamma\right)\Big].$$

З метою перенесення частинних похідних на функцію $z(t;x)$ виконуємо у (8) інтегрування по частинах.

Вважаємо, що виконані умови прямування до нуля на нескінченності по довільній компоненті змінної виразів:

$$D_k(t,x)\rho(t;x)b_{ik}(t;x),\ z(t,x)\rho(t;x)a_i(t;x);$$

$$z(t,x)\frac{\partial\left(\rho(t;x)b_{ik}(t;x)b_{jk}(t;x)\right)}{\partial x_i};$$

$$\frac{\partial z(t,x)}{\partial x_j}\left(\rho(t;x)b_{ik}(t;x)b_{jk}(t;x)\right),\ \forall i,j.$$

За формулою (7), з урахуванням перетворень для I_1 та умови (1),одержуємо:

$$\int_{R^n}\rho(0;y)d_t z(t;x(t;y))d\Gamma(y)= =\int_{R^n}\rho(0;y)d\Gamma(y)\{[F(t,x(t;y))+ +b_{ik}(t;x(t;y))\frac{\partial}{\partial x_i}D_k(t,x(t;y)) -a_i(t;x)\frac{\partial}{\partial x_i}z(t,x)+ +\frac{1}{2}b_{ik}(t;x)b_{jk}(t;x)\frac{\partial^2(z(t;x))}{\partial x_i\partial x_j}\Big]dt+ +D_k(t,x(t;y))dw_k+ +b_{ik}(t;x(t;y))\frac{\partial}{\partial x_i}z(x(t;y),t)dw_k+ +\int_{R(\gamma)}[(z(x(t;y)+g(t;x(t;y);\gamma)t)- -(z(x(t;y),t)]\nu(dt;d\gamma)+ +\int_{R(\gamma)}G(t;x(t;y),\gamma)\nu(dt;d\gamma). \quad (9)$$

Оскільки $\rho(0;y)$ — довільна функція, яка задовольняє умовам (1), то рівність (9) буде виконана, якщо $z(t;x(t;y))$ є розв'язком рівняння:

$$d_t z(t;x(t;y))=F(t,x(t;y))dt+D_k(t,x(t;y))dw_k+ +b_{ik}(t;x(t;y))\frac{\partial}{\partial x_i}z(x(t;y),t)dw_k+ +\left(-a_i(t;x)\frac{\partial}{\partial x_i}z(t,x)- -\frac{1}{2}b_{ik}(t;x)b_{jk}(t;x)\frac{\partial^2(z(t;x))}{\partial x_i\partial x_j}\right)dt+$$

$$+\int\limits_{R(\gamma)}\left[(z(x(t;y)+g(t;x(t;y);\gamma)t)-\right.$$

$$\left.-(z(x(t;y),t)\right]\nu(dt;d\gamma)+$$

$$+\int\limits_{R(\gamma)}G(t;x(t;y)+g(t;x(t;y),\gamma)\nu(dt;d\gamma). \qquad (10)$$

Формула (10) і є узагальненням формули Іто–Вентцеля. Спираючись на рівняння для стохастичного інтегрального інваріанта, встановлене правило диференціювання для випадкового процесу $z\big(t;x(t;y)\big)$, можемо переконатись, що

$$dJ(t,x(0))\,\rho\big(t;x(t;x(0)\big)=0,\ \forall t\ge 0, \qquad (11)$$

де $J(t,x(0))$ — якобіан переходу, елементи якого можуть бути знайдені за допомогою рівняння (2) [7].

Перейдемо до побудови стохастичних інваріантів, рівнянь для функцій, що зберігають постійне значення на траєкторіях розв'язків системи СДР (1). Дотримуючись термінології теорії звичайних диференціальних рівнянь, ці функції, здавалось, можна було б назвати першими інтегралами системи. Однак особливості випадкового процесу приводять до істотних відмінностей рівнянь, на основі яких ці функції знаходяться при зміні знака часу. У загальному випадку вони залежать від реалізацій випадкових збурень. Вимога незалежності їх від реалізації виступає як додаткове обмеження. Усе це викликало необхідність уведення понять прямого, зворотного і просто першого інтегралу системи СДР [5].

Нехай $u(t;x;\omega)$ — *випадкова функція*, визначена на тому ж імовірнісному просторі, що й розв'язок системи (1) (ω — індекс реалізації).

Означення. [7, с. 24] *Випадкову функцію* $u(t;x;\omega)$ *назвемо стохастичним першим інтегралом системи* (2)*, якщо з імовірністю одиниця* $u(t;x(t;x(0));\omega)=u(0;x(0),\omega)$ *на розв'язках* $x(t;x(0);\omega)$ *системи* (1). (Індекс ω зазвичай опускається).

Приклад. Безпосередньо можна перевірити, що

$$u(t;x;\omega)=f(x\xi(t)-\eta(t)),$$

де $f(x)$ — довільна, але фіксованого виду функція;

$$\xi(t)=\exp\left\{-\int_0^t\left(a(\tau)-\frac{1}{2}b^2(\tau)\right)d\tau-\right.$$

$$\left.-\int_0^t b(\tau)dw(\tau)-\int_0^t\int\limits_{R(\gamma)}\ln(1+g(\tau;\gamma))\nu(d\tau;d\gamma);\right.$$

$\eta(t)=\int_0^t\xi(\tau)c(\tau)d\tau+\int_0^t\int\limits_{R(\gamma)}g(\tau,\gamma)\nu(dt,d\gamma)$ — перший стохастичний інтеграл рівняння:

$$dx(t)=(a(t)+c(t)x(t))dt+$$

$$+b(t)dw(t)+\int\limits_{R(\gamma)}g(t,\gamma)\nu(dt,d\gamma).$$

Для перевірки можна скористатись більш загальним аналітичним розв'язком цього рівняння [1; с. 273–274].

Для стохастичних перших інтегралів функцій побудуємо рівняння у частинних похідних. З вимог (1) та (2) випливає, що для стохастичних ядер інтегральних інваріантів n-го порядку, пов'язаних з $x(t,x(0))$, і якобіана $J(t,x(0))$, з урахуванням (11), виконується рівність:

$$\rho(t;x(t;x(0))J_l(x(0))=\rho_l(0;x(0)),\quad l=\overline{1,n+1},$$

отже, функція

$$u_s(t;x)=\rho_s(t;x)\rho_l^{-1}(t;x) \qquad (12)$$

повинна мати властивості стохастичного першого інтегралу.

Зауваження. Побудувати рівняння для $u(t;x)$, у тому числі спираючись на (12), можна різними способами. Скористаємось же тим, що функція $f(u(t;x(t;\omega);\omega))$ від стохастичного першого інтегралу є також стохастичним першим інтегралом. Тому встановимо рівняння для логарифма від виразу (12), тобто для

$$\ln u_s(t;x)=\ln\rho_s(t;x)-\ln\rho_l(t;x). \qquad (13)$$

Використовуючи (13), узагальненою формулою Іто, після проведення диференціювання й приведення подібних, одержуємо таке рівняння для $\ln\rho(t;x)$:

$$d_t\ln\rho_s(t;x)=\left[-\frac{\partial a_i(t;x)}{\partial x_i}-a_i(t;x)\frac{\partial\ln\rho_s(t;x)}{\partial x_i}-\right.$$

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial b_{ik}(t;x)}{\partial x_i}\right)^2+-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial b_{ik}(t;x)}{\partial x_i}\right)^2+$$

$$+\frac{1}{2}b_{ik}(t;x)b_{jk}(t;x)\frac{\partial^2\ln\rho_s(t;x)}{\partial x_i x_j}+$$

$$+\frac{\partial\big(b_{ik}(t;x)b_{jk}(t;x)\big)}{x_j}\frac{\partial\ln\rho_s(t;x)}{\partial x_j}+$$

$$+\frac{1}{2}\frac{\partial^2\big(b_{ik}(t;x)b_{jk}(t;x)\big)}{\partial x_i x_j}-$$

$$\left.-b_{jk}(t;x)\frac{\partial b_{ik}(t;x)}{\partial x_i}\frac{\partial\ln\rho_s(t;x)}{\partial x_j}\right]dt+$$

$$+\int\limits_{R(\gamma)}\Big[\ln\big\{\rho_s\big([x-g(t;x(t;y);\gamma)];t\big)\times$$

$$\times D\big(x^{-1}(t;x;\gamma)\big)\big\}-\ln\rho_s(t;x)\Big]\nu(dt;d\gamma)-$$

$$-\left[\frac{\partial b_{ik}(t;x)}{\partial x_i}+b_{jk}(t;x)\frac{\partial\ln\rho_s(t;x)}{\partial x_j}\right]dw_k(t).$$

Спираючись на це рівняння і враховуючи зауваження, приходимо до висновку, що $u(t;x;\omega)$ є розв'язком рівняння:

$$d_t u(t;x)=b_{ik}(t;x)\left(b_{jk}(t;x)\frac{\partial u(t;x)}{\partial x_j}\right)dt+$$

$$+\left[-\frac{1}{2}b_{ik}(t;x)b_{jk}(t;x)\frac{\partial^2 u(t;x)}{\partial x_i x_j}+\right.$$

$$\left.+a_i(t;x)\frac{\partial u(t;x)}{\partial x_i}\right]dt - b_{ik}(t;x)\frac{\partial u(t;x)}{\partial x_i}dw_k(t)+$$

$$+\int_{R(\gamma)}\left[u(t;x-g(t;x^{-1}(t;x;\gamma));\gamma)-\right.$$

$$\left.-u(t;x)\right]\nu(dt;d\gamma). \qquad (14)$$

У праці [2] було введене поняття ***перших інтегралів системи стохастичних рівнянь як невипадкових функцій*** $u(t;x)$***, які на довільних реалізаціях розв'язків*** $x(t;x(0))$***, певного СДР, забезпечують рівність***:

$$u(0;x(0)) = u(t;x(t;x(0))).$$

Для випадку тільки вінерівських збурень, (рівняння Іто) ця умова пов'язана з установленням незалежності від реалізацій $w(t)$. При включенні пуассонівських збурень (узагальнене рівняння Іто), така вимога, як слідує з (14), приводить до умов:

$$b_{ik}(t;x)\frac{\partial u(t;x)}{\partial x_i}=0 \text{, для всіх } k=\overline{1,m},$$

$$\frac{\partial u(t;x)}{\partial t}+\frac{\partial u(t;x)}{\partial x_i}\left[a_i(t;x)-\frac{1}{2}b_{jk}(t;x)\frac{\partial u(t;x)}{\partial x_j}\right]=0,$$

$$u(t;x-g(t;x^{-1}(t;x;\gamma));\gamma)-u(t;x)=0$$

для будь-яких $\gamma\in R(\gamma)$ у всій області визначення процесу.

В останній із цих умов, повернемось до змінних $y = x - g(t;x^{-1}(t;x;\gamma);\gamma)$.

Враховуючи, що $x^{-1}(t;x;\gamma)$ є позначення зворотної функції для $y = x + g(t;x;\gamma)$, переконуємося, що ця умова еквівалентна такий:

$$u(t;x)-u(t;x+g(t;x;\gamma))=0. \qquad (15)$$

У працях [2; 4–6; 8] наведено приклади виразів інтегральних інваріантів, перших інтегралів для СДР, застосування перших інтегралів для знаходження точного розв'язку СДР спеціального виду, методи побудов класу систем, які забезпечують рівність (15). Це дає змогу перейти до розв'язку задач, пов'язаних з програмним керуванням.

Зупинимося на умові (15). Вона приводить до необхідності виконання рівностей:

$$u(x+g(x(t);t;\theta);t)=u(x;t),\forall\theta.$$

Але це умова автоморфності. Припустимо, що $g(x;t;\theta)$ — неперервна по довільній змінній і диференційована $\forall\, x,t$ по θ. Тоді, як випливає з (15), необхідно, щоб $\forall\; x,\, t$

$$\frac{\partial}{\partial\theta}u(x+g(x;t;\theta);t)=0. \qquad (16)$$

Зі співвідношення (16) випливає, що $\forall\; x,\, t$:

$$\left(\frac{\partial}{\partial\theta}g(x;t;\theta),\nabla_x u(x+g;t)\right)=0.$$

Ця умова буде виконана і для функції $g(t)=g(x,y,t,\theta)$, яка є розв'язком системи рівнянь:

$$\frac{\partial}{\partial\theta}g(t)=Q(t)\det\begin{bmatrix} e_1 & e_2 & \dots & e_n\\ q_{2,1} & q_{2,2} & \dots & q_{2,n}\\ q_{3,1} & q_{3,2} & \dots & q_{3,n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ q_{n,1} & q_{n,2} & \dots & q_{n,n}\end{bmatrix}, \qquad (17)$$

$$g(x,y,t;\theta)\Big|_{\theta=\theta_0}=g(x;y,t;\theta_0), \qquad (18)$$

де e_j, $j=\overline{1,n}$ — набір ортонормованих векторів,

$$q_{j,2}=\frac{\partial}{\partial g_j}u(x+g(.);t)\,,\; Q(t)=Q(x,y,t)\,,$$

і $q_{i,j}(x,y,t)$ — довільні випадкові функції; y — довільні змінні або функції від t чи інших параметрів.

Єдину вимогу до них пов'язуємо з збереженням умов існування та єдиності розв'язку рівняння (1), після підстановки в (1), знайденого на основі (17), $g(x,y,t,\theta)$. Отже, розв'язок знайдено. Тоді, у силу рівняння (15),

$$u(x+g(x,y,t,\theta_1);t)=u(x+g(x,y,t,\theta_2);t)\,,$$

$$\forall\, x,t,\theta_1,\theta_2\,.$$

В окремому випадку, якщо для будь-якого θ_0:

$$g(x,y,t,\theta_0)=0\,,$$

то, відповідно до (15):

$$u(x+g(x,y,t,\theta);t)=$$

$$=u(x+g(x,y,t,\theta_0);t)=u(x;t),$$

і, отже, для $y=0$

$$u(x+g(x;t;\theta);t)-u(x;t)\equiv 0,\forall x,t.$$

Було подано широке представлення про можливий клас рівнянь для визначення $g(x;t;\theta)$, оскільки подібне розширення знадобиться при встановленні умов існування детермінованих функціоналів від випадкових процесів у випадкових середовищах.

Приклад. Функція

$$u(x;t)=(x,x)\exp(-\int_0^t\left[2a(\tau)+b^2(\tau)\right]d\tau), \qquad (19)$$

де (x,x) — скалярний добуток, який є першим інтегралом [2] рівняння:

$$dx(t)=a(t)x(t)dt+b(t)Bx(t)dw(t), \qquad (20)$$

тут $w(t)$ — одновимірний вінерівський процес, $B=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}$, $x(t)\in\mathbb{R}^2$ (розглядається як вектор-стовпець).

У тому, що вираз (19) перший інтеграл можна переконатися після диференціювання $u(x(t);t)$, де $x(t)$ — довільний розв'язок рівняння (20).

Рівняння (17) для $g(x;t;\theta)$, для цього випадку, такі:

$$\frac{\partial g_1}{\partial \theta} = Q(t)\frac{\partial u(x+g;t)}{\partial g_2};\ \frac{\partial g_2}{\partial \theta} = -Q(t)\frac{\partial u(x+g;t)}{\partial g_1}.$$

Підставимо у ці рівняння замість $u(x;t)$ її аналітичний вираз (19) і виберемо

$$Q(t) = f^{-1}(t) = \exp\left(\int_0^t \left[2a(\tau)+b^2(\tau)\right]d\tau\right).$$

Тоді приходимо до рівнянь:

$$\frac{\partial g_1}{\partial \theta} = 2(x_2+g_2);\quad \frac{\partial g_2}{\partial \theta} = -2(x_1+g_1).$$

У матричній формі вони мають вигляд:

$$\frac{\partial g}{\partial \theta} = 2B(x+g).$$

Розв'язок цього рівняння такий:

$$\begin{gathered} g(x,\theta) = 2B\int_0^\theta d\theta_1 \exp\{2(\theta-\theta_2)B\}x + \\ +\exp\{(2\theta)B\}g(x,0). \end{gathered} \tag{21}$$

Враховуючи, що

$$B^2 = -\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} = -E,$$

і вважаючи $g(x,0)\equiv 0\ \forall\ x,t$, приходимо до представлення розв'язку (15):

$$g(x,\theta) = B\int_0^\theta d\theta_2 \exp\{2(\theta-\theta_2)B\}2x =$$

$$= B\int_0^{2\theta} d\theta_2 \cos(\theta-\theta_2)x - \int_0^{2\theta} d\theta_2 \sin(\theta-\theta_2)x =$$

$$= -Bx\sin 2\theta - (1-\cos 2\theta)x.$$

Таким чином,

$$g_1(x,\theta) = x_2\sin 2\theta - x_1(1-\cos 2\theta),$$

$$g_2(x,\theta) = -x_1\sin 2\theta - x_2(1-\cos 2\theta).$$

Те, що цей розв'язок забезпечує автоморфне перетворення (15), можна переконатись безпосередньою заміною $x \to x+g(x,\theta)$ у (21).

Висновки. Запропоноване означення інтегрування за випадковими многовидами, дало змогу встановити правило диференціювання випадкової складної функції від розв'язків узагальненого рівняння Іто; побудувати рівняння для стохастичних перших та перших інтегралів динамічних систем при вінерівських та пуассонівських збуреннях; побудувати рівняння для знаходження ядер інтегральних інваріантів.

Отримані рівняння для знаходження континууму автоморфний перетворень для довільної функції використані як алгоритм розширення класу рівнянь Іто до узагальнених рівнянь Іто, що мають спільний перший інтеграл.

Зауважимо, що саме висновки цієї роботи дозволяють у подальшому відшуковувати програмні керування, які забезпечать збереження життєво важливих показників відкритих динамічних систем не у середньому, а в умовах суттєвої невизначеності, на довільних реалізаціях випадкових впливів.

Як відмічено у праці [6; с.107], запропонований підхід дозволяє не тільки досліджувати умови глобальної інваріантності функціоналів від випадкових процесів, але виконання умов інваріантності на певних підмножинах, поза якими ці умови порушуються — локальної інваріантності.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Гихман И. И.* Стохастические дифференциальные уравнения/ И. И. Гихман, А. В. Скороход. — К. : Наук. думка, 1968. — 354 с.

2. *Дубко В. А.* Первый интеграл системы стохастических дифференциальных уравнений / В. А. Дубко. — К. : Препринт 78-27 ИМАН УССР, 1978. — 26 с.

3. *Дубко В. А.* Интегральные инварианты для одного класса систем стохастических дифференциальных уравнений / В. А. Дубко // ДАН УССР. — Серия А. — 1984. — № 1. — С. 18–21.

4. *Дубко В. А.* Законы сохранения открытых систем / В. А. Дубко // Вероятностные методы в биологии: сб. труд. Ин-тут математики АН УССР. — К., 1985. — С. 48–55.

5. *Дубко В. А.* Вопросы теории и применения стохастических дифференциальных уравнений / В. А. Дубко. — Владивосток : ДВНЦ АН СССР, 1989. — 185 с.

6. Дубко В. А. В поисках скрытого порядка / В. А. Дубко, Ф. Н. Рянски, Э. М. Сороко [и др.] — Владивосток : Дальнаука, 1995. — 118 с.

7. *Дубко В. А.* Открытые эволюционирующие системы (Некоторые аспекты математического моделирования)/ В. А. Дубко // Перша міжнародна науково-практична конференція «Відкриті еволюціонуючі системи», (26–27 квітня 2002 р.).: зб. текст. доп. — К. : ВНЗ ВМУРоЛ, 2002. — С. 14–31.

8. *Дубко В. А.* Интегральные инварианты уравнений Ито и их связь с некоторыми задачами теории случайных процессов // Док. НАН Украины — 2002. — № 1. — С. 24–29.

9. *Дубко В. А* Проблема инвариантности и алгоритм построения множества автоморфных преобразований для заданной функции / В. А. Дубко // Друга міжнародна науково-практична конференція «Відкриті еволюціонуючі системи» (01–30 грудня 2003 р.): зб. текст. доп. — К. : ВНЗ ВМУРоЛ, 2004. — Т. 2. — С. 66–68.

Стаття надійшла до редакції 16.02.2011.
Стаття надійшла після виправлення 04.07.2011.