УДК 004.932.2(045)

МОДЕЛЬ РЕАЛІСТИЧНИХ ЗОБРАЖЕНЬ НА ОСНОВІ ДВОВИМІРНИХ СПЛАЙНІВ, БЛИЗЬКИХ ДО ІНТЕРПОЛЯЦІЙНИХ У СЕРЕДНЬОМУ

П. О. Приставка, д-р. техн. наук, проф.; ***М. О. Рябий***

Національний авіаційний університет

m.ryabyy@nau.edu.ua

Проведено дослідження побудови моделей аналогових реалістичних зображень на основі двовимірних поліноміальних сплайнів на основі B-сплайнів, які близькі до інтерполяційних у середньому. Обчислювальна простота розглянутих сплайн-операторів дозволяє рекомендувати їх для реалізації у програмному забезпеченні обробки цифрових зображень, у тому числі для систем, що функціонують у режимі реального часу.

Ключові слова: модель зображення, дискретизація, квантування, *B*-сплайн.

Studies of models of analog realistic images based on two-dimensional polynomial splines based on B-splines, interpolation close to the average. Computational simplicity of the considered spline-operators to recommend them for implementation in software, digital imaging, including systems that operate in real time.

Keywords: model image, sampling, quantization, *B*-spline.

Постановка проблеми

На сьогодні математична обробка реалістичних цифрових зображень (фото) характеризується потребою реалізації обчислень, що здійснюються в режимі реального часу. При цьому розміри цифрових фотографій мають сталу тенденцію до зростання. Тож, урахування динаміки зростання обсягів даних, що обробляються, є актуальною потребою під час визначення методів обробки. Зазвичай такі методи є обчислювальним аспектом відомих підходів до апроксимації, наприклад, швидке перетворення Фур'є, для інших спеціально розроблено теоретичне обґрунтування, наприклад, вейвлет-методи.

Як критерій адекватності роботи методу вимагають, щоб результат обробки відповідав фізичній природі зображення. Така вимога природно може бути виконана, якщо метод ґрунтується на відповідній моделі.

Отже, загально проблематика роботи полягає в пошуку адекватної моделі реалістичного зображення, яка при побудові потребує незначної кількості обчислювальних операцій.

Аналіз публікацій та постановка задачі

Цифрові зображення (ЦЗ) можна поділити на дві загальні групи: зображення, що є результатом реєстрації різного роду «сигналів», та штучно сформовані зображення. Питання побудови моделей цифрових зображень першої групи пов'яжемо з процесом їх реєстрації.

Завдання реєстрації зображень полягає у формуванні ЦЗ на основі даних, які отримані за допомогою матриці чуттєвих сенсорів. Для цього застосовують дискретизацію та квантування. Розглянемо реєстрацію зображень, що фіксуються у видимому діапазоні.

Дискретизація зображення, як показано в праці [1], відбувається таким чином (рис. 1).

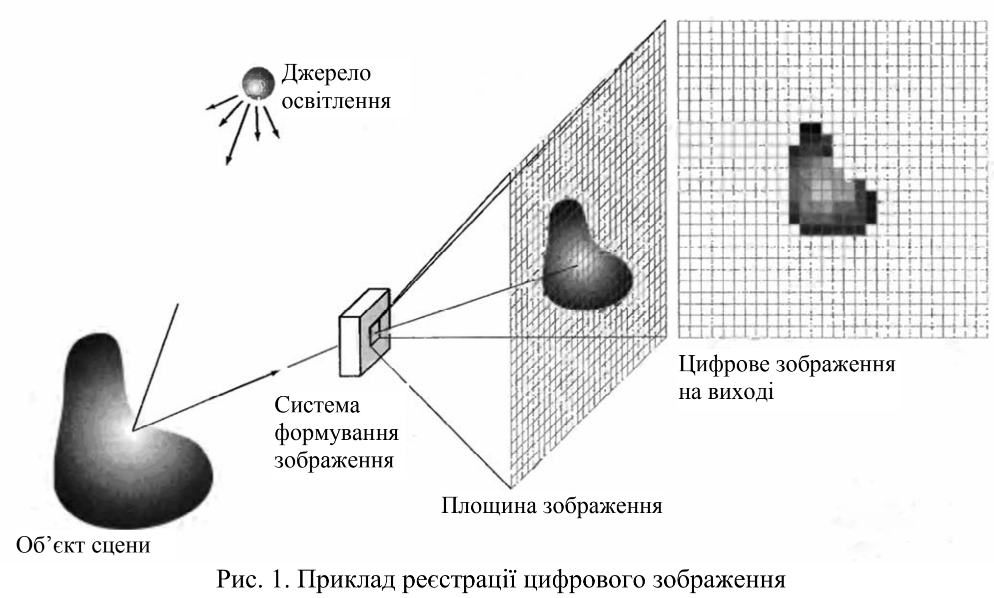

Рис. 1. Приклад реєстрації цифрового зображення

Система формування зображення збирає енергію, що надходить від джерела освітлення та відображається від об'єкта просторової сцени. Якщо як освітленість використовувати джерело видимого світла, то на вході системи формування зображення буде об'єктив, який проектує сцену, що спостерігається, на площину зображення.

Матриця чутливих сенсорів, поєднана з цією площиною, генерує набір вихідних сигналів, кожен з яких пропорційний інтегралу світлової енергії, що отримано сенсором. При цьому можлива втрата частини інформації, оскільки мова йде про усереднення значення енергії.

Отже, перетворення неперервних сигналів у цифрові здійснюють, як правило, у вигляді послідовності елементарних процедур — дискретизації та поелементного квантування. Дискретизація належить до класу лінійних перетворень, а поелементне квантування до класу нелінійних перетворень.

Дискретизація — це заміна неперервного сигналу послідовністю чисел — представленням цього сигналу за якимось скінченновимірним базисом. Поелементне квантування − квантування кожного окремого числа з набору чисел, які представляють сигнал за заданим базисом.

Найзручніший спосіб дискретизації — це дискретизація раструванням, яка полягає в представленні зображень у вигляді вибірок значень в окремих, регулярно розташованих точках.

Варто зауважити, що за способом реєстрації ЦЗ, дані, що його подають, за фактом є усередненими значеннями. Тобто, у разі фіксації аналогового зображення має місце таке. Нехай площина зображення визначається осями *T* та *Q*.

Крок дискретизації за напрямами *T*, *Q* однаковий $h>0$, отже, задано рівномірне розбиття

$$\Delta_{h,h}: t_i = ih, q_j = jh\,,\ i=\overline{0,H-1}\,,\ j=\overline{0,W-1}\,,$$

де H та W — лінійні розміри фіксованого ЦЗ, що фіксується.

Нехай $\phi(t,q)$ — функція імпульсного відклику реєструючої системи і $p(t,q)$ — функція інтенсивності освітлення об'єктів просторової сцени (аналогове зображення). Тоді, в силу суто технічних властивостей систем реєстрації, результатом згортки $p(t,q)$ та функції відклику буде значення, усереднене в області дискретизації, зокрема:

$$(p*\phi)(ih,jh)=$$

$$=\frac{1}{h^2}\int\limits_{ih-\frac{h}{2}}^{ih+\frac{h}{2}}\int\limits_{jh-\frac{h}{2}}^{jh+\frac{h}{2}} p(t,q)\phi(t-ih,q-jh)\,dtdq=\overline{p}_{i,j}.$$

Тож дискретизовані (квантовані) значення інтенсивності світлового потоку (цифрове зображення) можна подати у такому вигляді

$$p_{i,j}=\overline{p}_{i,j}+\varepsilon_{i,j}\,,\ i=\overline{0,H-1}\,,\ j=\overline{0,W-1}\,, \qquad (1)$$

де $\varepsilon_{i,j}$ — випадкова перешкода.

Стосовно перешкоди $\varepsilon_{i,j}$ можна припускати будь-який розподіл, наприклад Гауссів. Отже, при побудові моделі зображень за даними (1) необхідно використовувати апроксимації, що враховують і випадкову природу даних, і фізичні властивості систем реєстрації, зокрема, оператори інтерполяційні в середньому або близькі до інтерполяційних у середньому.

Традиційно задача моделювання аналогового зображення розв'язується так [2; 3]. Якщо дискретизація аналогового зображення проведена раструванням, то ідеальне інтерполяційне відновлення $p(t,q)$ виконується за допомогою двовимірного фільтра з прямокутною частотною характеристикою, отриманою за допомогою зворотного перетворення Фур'є:

$$h(t,q)=\frac{\sin(\pi t)}{\pi t}\cdot\frac{\sin(\pi q)}{\pi q}.$$

Продукт фільтрації може бути визначений за допомогою двовимірної згортки ЦЗ і даної імпульсної характеристики. Після виконання згортки має місце:

$$p(t,q)=\sum_i\sum_j p_{i,j}\frac{\sin(\pi(t-i))}{\pi(t-i)}\cdot\frac{\sin(\pi(q-j))}{\pi(q-j)}.$$

Наведене співвідношення, що являє собою двовимірний варіант теореми Котельникова — Найквіста, вказує спосіб точного інтерполяційного відтворення безперервного зображення за відомою послідовності його двовимірних відліків. Тобто, для точного відновлення в ролі інтерполюючої функції повинні використовуватися двовимірні функції виду $\sin(x)/x$.

Дійсно справедливо, якщо двовимірний спектр сигналу є фінітним, а інтервали дискретизації досить малі. Справедливість зроблених висновків порушується, якщо хоча б одна з цих умов не виконується. Реальні зображення рідко мають спектри з яскраво вираженими граничними частотами. Однією з причин, що призводять до необмеженості спектра, є обмеженість розмірів зображення.

Вирішити цю проблему можна побудувавши моделі ЦЗ на основі базису фінітних функцій, що близькі за властивостями до властивостей аналогового зображення в спектральній області. Наприклад, лінійні комбінації *B*-сплайнів [4—7] є обчислювальним засобом обробки послідовностей відліків функцій, якому притаманні ряд цінних властивостей: обчислювальна простота, можливість враховувати локальні «особливості» сигналу, згладжувальні властивості та ін. Тому актуальним може бути розгляд питання про можливість використання згаданих сплайнів на випадок побудови моделі аналогового зображення.

Виклад основного матеріалу

У монографії [7] для апроксимації функції $p(t,q)$ за значеннями типу (1) у вузлах розбиття $\Delta_{h,h}$ подано лінійні комбінації *B*-сплайнів, що є близькими до інтерполяційних у середньому. Наприклад, сплайн-оператори нульового та першого ступеня уточнення на основі *B*-сплайнів другого порядку такі:

$$S_{2,0}(p,t,q)=\sum_{i\in Z}\sum_{j\in Z}p_{i,j}B_{2,h}(t-ih)B_{2,h}(q-jh). \quad (2)$$

$$S_{2,1}(p,t,q)=$$

$$=\sum_{i\in Z}\sum_{j\in Z}\left(p_{i,j}-\frac{1}{6}\left(\Delta_i^2 p_{i,j}+\Delta_j^2 p_{i,j}\right)+\frac{1}{36}\Delta_{ij}^2 p_{i,j}\right)\times$$

$$\times B_{2,h}(t-ih)B_{2,h}(q-jh), \quad (3)$$

де (з точністю до аргументу)

$$B_{2,h}(t)=\begin{cases}0, & t\notin[-3h/2;3h/2],\\ (3+2t/h)^2/8, & t\in[-3h/2;-h/2],\\ 3/4-(2t/h)^2/4, & t\in[-h/2;h/2],\\ (3-2t/h)^2/8, & t\in[h/2;3h/2];\end{cases}$$

$$\Delta_i^2 p_{i,j}=p_{i-1,j}-2p_{i,j}+p_{i+1,j};$$

$$\Delta_j^2 p_{i,j}=p_{i,j-1}-2p_{i,j}+p_{i,j+1};$$

$$\begin{aligned}\Delta_{ij}^2 p_{i,j}&=\Delta_i^2 p_{i,j-1}-2\Delta_i^2 p_{i,j}+\Delta_i^2 p_{i,j+1}=\\ &=\Delta_j^2 p_{i-1,j}-2\Delta_j^2 p_{i,j}+\Delta_j^2 p_{i+1,j}.\end{aligned}$$

Обґрунтуванням обрання розглянутих сплайнів як моделі аналогового зображення можуть бути міркування, відповідні тим, що викладені в праці [8] для моделювання аналогових одновимірних сигналів з кінцевою енергією на основі аналогічних одновимірних лінійних комбінацій *B*-сплайнів. Зокрема, виходячи з положення, що базис *B*-сплайнів є базисом Риса та з того факту, що фундаментальні сплайни на основі *B*-сплайнів [9] прямують до нуля експоненціально швидко при віддаленні від локальної (i,j)-ї області наближення, прийнятним є використання введених у праці [7] двовимірних локальних поліноміальних сплайнів, близьких до інтерполяційних у середньому як моделі ЦЗ.

Якщо обрати як моделі зображення $p(t,q)$ сплайни (2), (3), то така оцінка за певних умов є фактично асимптотично точною. Зокрема, якщо $p(t,q)\in C^{2,2}$, $|\varepsilon_{i,j}|<\varepsilon$, $i,j\in Z$ і $\forall\varepsilon>0$, то справедлива [6] така оцінка:

$$\left\|p(t,q)-S_{2,0}(p,t,q)\right\|\le\frac{h_t^2}{6}\left\|p''_{t^2}(t,q)\right\|+\frac{h_q^2}{6}\left\|p''_{q^2}(t,q)\right\|+$$

$$+\frac{h_t^2h_q^2}{36}\left\|p^{(4)}_{t^2q^2}(t,q)\right\|+\varepsilon\cdot\left\|p(t,q)\right\|+o\left(h^4\right), \quad (4)$$

для $\forall p(t,q)\in C^{3,3}$ і $\forall\varepsilon>0$ справедлива нерівність

$$\left\|p(t,q)-S_{2,1}(p,t,q)\right\|\le\frac{h_t^3}{12\sqrt{3}}\left\|p'''_{t^3}(t,q)\right\|+\frac{h_q^3}{12\sqrt{3}}\left\|p'''_{q^3}(t,q)\right\|+$$

$$+\frac{h_t^3h_q^3}{432}\left\|p^{(5)}_{t^3q^3}(t,q)\right\|+\varepsilon\cdot\frac{16}{9}\left\|p(t,q)\right\|+o\left(h^6\right). \quad (5)$$

Вираз (3) надає високоточне наближення, а сам сплайн, що уточнює (та інші аналогічні [7]), є оператором близьким до інтерполяційних у середньому в асимптотичному сенсі.

Якщо ж як апроксимацію сигналу обрати вираз (2) або будь-яку іншу комбінацію *B*-сплайнів такого типу:

$$S_{r,0}(p,t,q)=\sum_{i\in Z}\sum_{i\in Z}p_{i,j}B_{r,h_t}(t-ih_t)B_{r,h_q}(q-jh_q),$$

$$r=2,3,\dots\,, \quad (6)$$

то отримаємо модель з властивостями імпульсного нерекурсивного низькочастотного фільтру [10].

Зокрема, в праці [9, стор. 102] наведено доведення, що як і функція Гаусса, будь-який *B*-сплайн порядку вище першого може бути використаний для визначення коротковіконного перетворення Фур'є (КВПФ).

Отже, якщо $B_r(t)$, $r\ge2$ — *B*-сплайн порядку r, то

$$\hat{B}_r(\omega)=\left(\frac{1-e^{i\omega}}{i\omega}\right)^r=e^{-ir\omega}\left(\frac{\sin(\omega/2)}{(\omega/2)}\right)^r$$

або так (як у праці [11]):

$$\hat{B}_r(\omega)=\left(\frac{e^{i\omega/2}-e^{-i\omega/2}}{i\omega}\right)^{r+1}=\left(\frac{\sin(\omega/2)}{(\omega/2)}\right)^{r+1}.$$

Із рис. 3 видно, що вже починаючи з порядку $r=5$ і *B*-сплайн, і гауссіан у частотній області фактично мало чим відрізняються, при цьому розрахунок *B*-сплайну п'ятого порядку [12] потребує менше обчислювальних витрат.

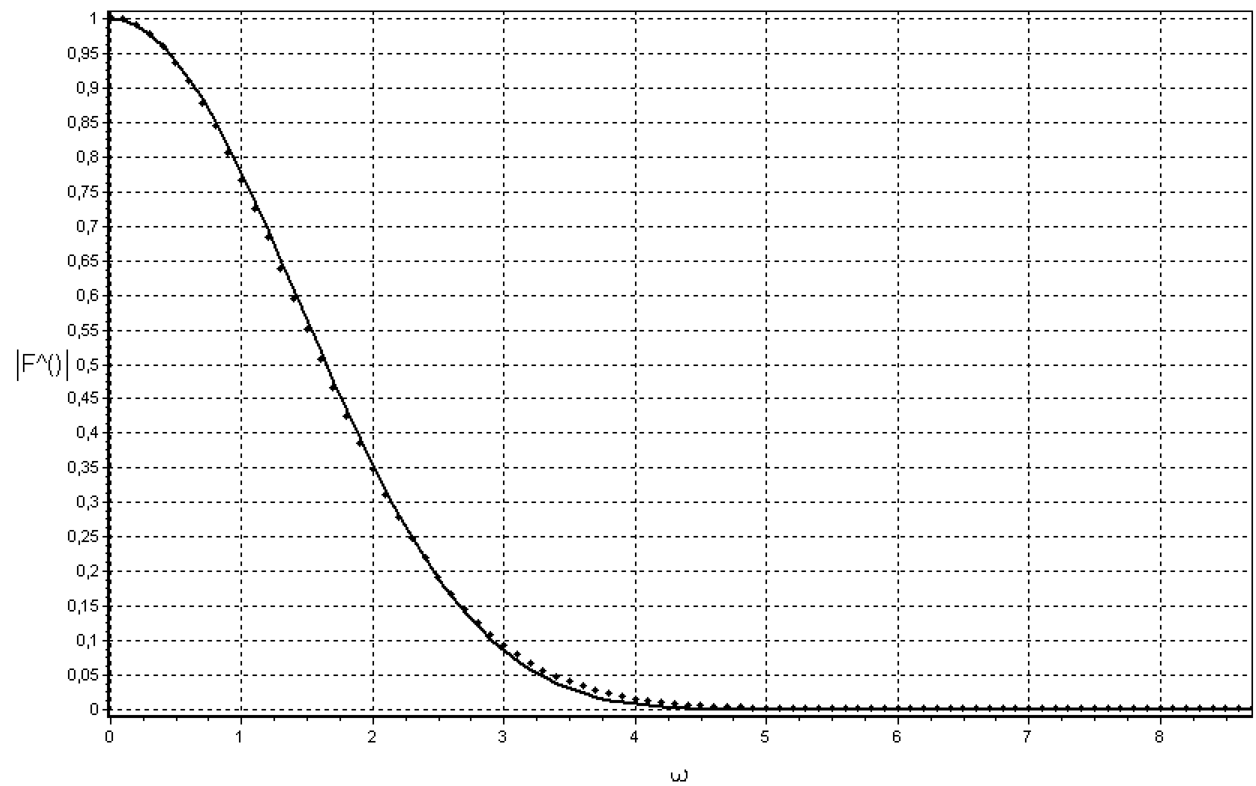

Рис. 2. *B*-сплайн п'ятого порядку (суцільна лінія) та гауссіан (крапки) з $\sigma = 0,725$

Тож, якщо є потреба в отриманні цифрового низькочастотного фільтру ЦЗ, то достатньо в моделі (6) визначити значення сплайну у вузлах розбиття $\Delta_{h,h}$ [13].

Наприклад, якщо ввести заміну

$$x = \frac{2}{h_t}\left(t - ih_t\right),\ |x| \le 1,\ y = \frac{2}{h_q}\left(q - jh_q\right),\ |y| \le 1,$$

можна подати (2) в розгорнутому вигляді

$$S_{2,0}\left(p,t,q\right) =$$
$$= \frac{1}{64}\Big((1-x)^2(1-y)^2 p_{i-1,j-1} + (1-x)^2\left(6-2y^2\right)p_{i-1,j} +$$
$$+ (1-x)^2(1+y)^2 p_{i-1,j+1} +$$
$$+\left(6-2x^2\right)(1-y)^2 p_{i,j-1} + \left(6-2x^2\right)\left(6-2y^2\right)p_{i,j} +$$
$$+\left(6-2x^2\right)(1+y)^2 p_{i,j+1} +$$
$$+(1+x)^2(1-y)^2 p_{i+1,j-1} + (1+x)^2\left(6-2y^2\right)p_{i+1,j} +$$
$$+(1+x)^2(1+y)^2 p_{i+1,j+1}\Big).$$

Далі, поклавши $x = 0$, $y = 0$, отримаємо лінійний оператор $L\left(p^{i,j}\right)$ низькочастотної фільтрації:

$$L\left(p^{i,j}\right) = S_{2,0}\left(p, ih, jh\right) =$$
$$= \big(p_{i-1,j-1} + 6p_{i-1,j} + p_{i+1,j+1} +$$
$$+ 6p_{i,j-1} + 36p_{i,j} + 6p_{i,j+1} + p_{i+1,j-1} +$$
$$+ 6p_{i+1,j} + p_{i+1,j+1}\big)/64,\quad i,j \in \mathbb{Z},$$

або, використовуючи запис у формі дискретної згортки послідовності $p_{i,j}$, $i,j \in \mathbb{Z}$ з маскою фільтра γ, можна записати так:

$$L\left(p^{i,j}\right) = \sum_{ii=i-1}^{i+1}\sum_{jj=j-1}^{j+1} \gamma_{ii-i,jj-j}\, p_{ii,jj},$$
$$i,j \in \mathbb{Z},$$

де

$$\gamma = \frac{1}{64}\begin{pmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 6 & 36 & 6 \\ 1 & 6 & 1 \end{pmatrix}.$$

При $r = 5$ має місце такий низькочастотний фільтр ЦЗ:

$$L\left(p^{i,j}\right) = \sum_{ii=i-2}^{i+2}\sum_{jj=j-2}^{j+2} \gamma_{ii-i,jj-j}\, p_{ii,jj},$$
$$i,j \in \mathbb{Z},$$

де

$$\gamma = \frac{1}{14400}\begin{pmatrix} 1 & 26 & 66 & 26 & 1 \\ 26 & 676 & 1716 & 676 & 26 \\ 66 & 1716 & 4356 & 1716 & 66 \\ 26 & 676 & 1716 & 676 & 26 \\ 1 & 26 & 66 & 26 & 1 \end{pmatrix}.$$

Отже, обираючи як модель зображення уточнювальні сплайни типу (3), неважко отримати ефективні швидкодіючі процедури для зміни лінійних розмірів ЦЗ — процедури *subdivision* [7].

Висновок

Проведені дослідження дозволяють рекомендувати двовимірні поліноміальні сплайни на основі *B*-сплайнів, близькі до інтерполяційних у середньому для побудови моделей аналогових реалістичних зображень.

Обчислювальна простота розглянутих сплайн-операторів дає змогу рекомендувати їх для реалізації у програмному забезпеченні обробки цифрових зображень, у тому числі для систем, що функціонують у режимі реального часу.

Подальша робота може бути спрямована на узагальнення результатів даної статті та праці [8] для побудови моделей аналогового відео та для отримання відповідних тривимірних лінійних операторів оперативної обробки цифрованого відеопотоку.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Александров В. В.* Зрительное восприятие человека и машинное зрение / В. В. Александров, Н. Д. Горский // Искусственный интеллект : в 3-х кн. — М. : Радио и связь, 1990. — Кн. 2 : Модели и методы : справочник : под. ред. Д. А. Поспелова. — С. 191—196.

2. *Цифровая* обработка изображений в информационных системах: учеб. пособие / И. Грузман, В. Киричук [и др.]. — Новосибирск : изд-во НГТУ, 2000. —168 с.

3. *Ярославский Л. П.* Введение в цифровую обработку изображений / Л. П. Ярославский. — М. : Сов. радио, 1979. — 312 с.

4. *Корнейчук Н. П.* Сплайны в теории приближения / Корнейчук Н. П. — М. : Наука, 1984. — 351 с.

5. *Де Бор К.* Практическое руководство по сплайнам / К. Де Бор. — М. : Радио и связь, 1985. — 303 с.

6. *Лигун А. А.* Асимптотические методы восстановления кривых / А. А. Лигун, А. А. Шумейко. — К. : ИМ НАНУ, 1997. — 358 с.

7. *Приставка П. О.* Поліномаільні сплайни при обробці даних / П. О. Приставка. — Д. : Вид-во Дніпропетр. ун-ту, 2004. — 236 с.

8. *Приставка П. О.* Лінійні комбінації *B*-сплайнів, близькі до інтерполяційних у середньому, в задачі моделювання аналогових сигналів / П. О. Приставка // Актуальні проблеми автоматизації та інформаційних технологій : зб. наук. пр. — Д. : Вид-во Дніпропетр. ун-ту, 2011. — Т. 15. — С. 4—17.

9. *Чуи Ч.* Введение в вэйвлеты / пер. с. англ. / Ч. Чуи. — М. : Мир, 2001. — 412 с.

10. *Василенко В. А.* Сплайн-функции и цифровые фильтры / В. А. Василенко, М. В. Зюзин, А. В. Ковалков; под ред. А. С. Алексеева. — Новосибирск : Вычислительный центр СО АН СССР, 1984. — 141 с.

11. *M. Unser* “Splines: A Perfect Fit for Signal and Image Processing”, *IEEE Signal Processing Magazine*, vol. 16, no. 6. — P. 22—38, 1999.

12. *Приставка П. О.* Дослідження *B*-сплайну п’ятого порядку та їх лінійної комбінації / П. О. Приставка, О. Г. Чолишкіна // Математичне моделювання. — ДДТУ, Дніпродзержинськ. — 2007. — №1 (16). — С. 14—17.

13. *Приставка П. О.* Обчислювальні аспекти застосування поліноміальних сплайнів при побудові фільтрів / П. О. Приставка // Актуальні проблеми автоматизації та інформаційних технологій. — Д. : Вид-во Дніпропетр. ун-ту, 2006. — Т. 10. — С. 3—14.

Стаття надійшла до редакції 18.05.2012.